IA : TAMBA | Prof : M. DRAME
Lycée : Koumpentoum | Classe : $1^{ere}S_2$
Année : 2020-2021 | Chapitre : Application-Limite-Continuité

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1

1. Parmi les fonctions suivantes, trouver les applications.

$f : [2\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{\sqrt{x-2}}$ $\quad$ $g : [-1\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{2x+2}$

$h : [-\infty\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \dfrac{2x}{x^2+x+1}$ $\quad$ $t :\ ]1\,;2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

2. Ecrire h sans le symbole de la valeur absolue.

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x :\longrightarrow \left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$

a. Donner la restriction de h à l'intervalle $[-2\,;2[$
b. Trouver une application ayant même restriction que h à $]2\,;\,+\infty[$

EXERCICE 2

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \longrightarrow 2n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \longrightarrow n+1$
3. $h : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x\,,y) \longrightarrow (x+y\,,x-y)$

EXERCICE 3

Soit f l'application de n vers n définie par :

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2} \text{ si n est pair} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2} \text{ si n est impair.} \end{cases}$$

Cette application est-elle injective ? est-elle surjective ?

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

1. $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x \longrightarrow \dfrac{4x-1}{2x-4}$

2. $f : [1\,;\,+\infty[\longrightarrow [0\,;\,+\infty[$

$x \longrightarrow x^2-1$

3. $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x\,,y) \longrightarrow (x-2y\,,x+3y)$

4. $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \dfrac{x+2}{x+1}$

a. f est-elle injective ? surjective ?
b. Déterminer un ensemble J tel que f soit bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ vers J ;puis déterminer sa bijection réciproque
c. Déterminer les réels a et b tel que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$

EXERCICE 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,,1]$
3. Montrer que la restriction de g définie par

$g : [-1\,,1] \longrightarrow [-1\,,1]$

$x \longrightarrow g(x)=f(x)$

est une bijection.

EXERCICE 6

A) Dans chacun des cas suivants, calculer gof, puis déterminer l'ensemble de définition de la fonction gof.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 5+2x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
2. $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x\,,y) \longrightarrow (2x\,,1-y)$ et $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x\,,y) \longrightarrow \left(\dfrac{1}{x}\,,\dfrac{1-x}{y}\right)$

B) soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x\,,y) \longrightarrow (-x+3y\,,3x-4y)$

Déterminer fof(x , y)

EXERCICE 7

A) Soit f l'application de ℝ dans ℝ définie par

$f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Trouver toutes les applications affines g telles que : gof = fog

B) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{2(x-1)^2}$

Déterminer trois fonctions U(x),V(x) et W(x) telles que :

f(x) = UoVoW(x)

EXERCICE 8

1. Etudier la parité des fonctions suivantes.

   $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$; $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-16}}{|x|-5}$
2. Soit $f(x)$ une fonction définie sur ℝ.

   Montrer que si f est impaire alors $f(0) = 0$.
3. Soit $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
   a. Calculer $f(x+4)$, $f(x+6)$ et $f(x+8)$ en fonction de $f(x)$.
   b. En déduire que f est périodique et préciser sa période.

EXERCICE 9

A. Calculer :

1. $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$
2. $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{x^4+x^2+2} - x^2 - x - 1$
3. $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x^2-x-1}$

B. Soit $f(x) = \frac{2x-1-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x-3+\sqrt{3x^2-x+2}}$ et $g(x) = |x-1|$

Calculer la limite de f et g en +∞ en -∞ et en 1.

C. Calculer $\lim\limits_{+\infty} x^k$, $\lim\limits_{-\infty} 2x^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 10

Soit f l'application définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x + \sqrt{x+1}$

1. Montrer que $f(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. f est- elle surjective ?
3. Soit h définie de $\mathbb{R}^*{}_+$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective.

EXERCICE 11

1. Dans chacun des cas suivants étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction f.

   a. $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-2x-1}$ b. $\begin{cases} f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$
2. Soit $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|-1)} \; si\ x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$
   a. Déterminer D_f .
   b. Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

EXERCICE 12

Soit $f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{1}{x} \; si\ x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Déterminer a pour que f soit continue sur D_f.

EXERCICE 13

1. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6 + |x-3|}{x^2-9} \; si\ x \neq 3 \\ f(3) = a \end{cases}$$

a. Déterminer le domaine de définition de f.
b. Déterminer la limite à gauche et à droite en 3.
c. Existent-ils des valeurs de a pour lesquelles f est continue en 3.

2. soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3}$

g est-elle prolongeable par continuité en -3 ?; en 3 ? si oui donner le prolongement.

EXERCICE 14

1. Soit $f(x) = \frac{x+E(x)}{x}$
   a. Montrer que $\forall\, x \in]0;+\infty[$, on a : $\frac{2x-1}{x} < f(x) \leq 2$
   b. En déduire $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$.
2. Soit f la fonction définie par :

$\begin{cases} f(x) = xE\left[\frac{1}{x} + E\left(\frac{1}{x}\right)\right] \; si\ x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0.

EXERCICE 15

Soit $g(x) = \frac{E(x^2)}{x}$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Montrer que $g(x) = 0$ sur $]0;1[$. En déduire la limite en 0^+ puis en 0^- de g.
4. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0 ; préciser le prolongement en 0.